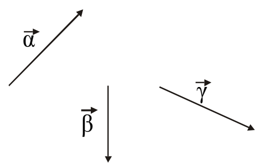
Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να κατασκευάσετε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.



2. * Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ισχύει $\left|(\lambda-3)\vec{\alpha}\right|<\left|5\vec{\alpha}\right|$ όπου $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$;

3. ** Στο επίπεδο δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, τα οποία ανά δυο είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το άθροισμά τους αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\gamma}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$.

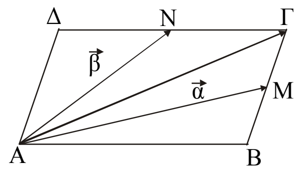
4. * Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{A\Delta}=3\vec{q}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\vec{p}, \vec{q}$.

5. * Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα και ένα εσωτερικό του σημείο Γ τέτοιο ώστε $A\Gamma=\frac{3}{4}AB$. Αν τα διανύσματα θέσης των Α, Β είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου Γ.

6. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{AP}$, όπου Ρ σημείο του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι το σημείο Ρ ταυτίζεται με το μέσο της ΒΓ.

7. * Έστω Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά. Να βρείτε σημείο Μ του επιπέδου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

8. ** Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$.



9. ** Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ) με μια γωνία ίση με 60^o. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ οι οποίες τέμνονται στο Ο. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{O\Delta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

10. * Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ του επιπέδου του. Να δείξετε ότι το $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

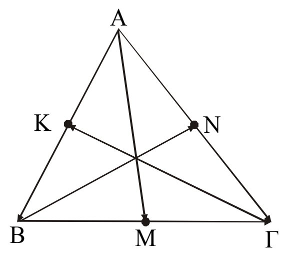
11. * Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

12. ** Στις πλευρές ΟΑ και ΟΒ ενός ορθογωνίου ΟΑΓΒ παίρνουμε μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως. Αν ΟΑ = 3 και ΟΓ = 5, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{i}$, $\vec{j}$. Στη συνέχεια αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντιστοίχως, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ και $\overrightarrow{MN}$ ως συνάρτηση των $\vec{i}$, $\vec{j}$.

13. * Αν $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ και $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ υπολογίστε το διάνυσμα:

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + 3(5\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{u}).$$

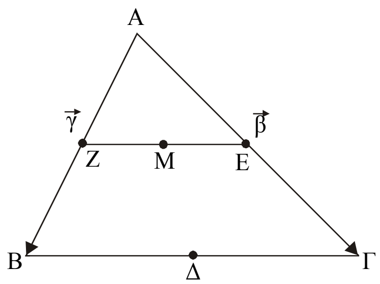
14. *** Τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου και τα σημεία Μ, Ν, και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\gamma}$ να βρείτε:



α) Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

β) Το άθροισμα $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{\Gamma K}$.

15. * Τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τριγώνου και τα Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και Μ το μέσον του ΕΖ, τότε:



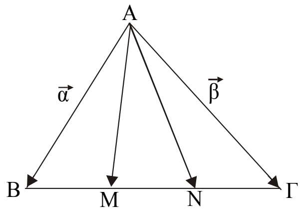
α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

β) Τι συμπεραίνετε για τα σημεία Α, Μ και Δ;

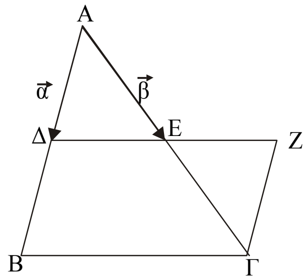
16. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και επί των πλευρών του τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Σ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta\Sigma} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΡΣ είναι παραλληλόγραμμο.

17. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,-1)$, $\vec{\beta}$ = (1, -2) και $\vec{\gamma}$ = (1, -7). Να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

18. ** Τα σημεία Μ και Ν διαιρούν την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ σε τρία ίσα τμήματα. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



19. ** Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, Δ και Ε είναι τα μεσα των ΑΒ και ΑΓ. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα: α) $\overrightarrow{\Delta E}$ β) $\overrightarrow{\Delta Z}$ γ) $\overrightarrow{Z\Gamma}$

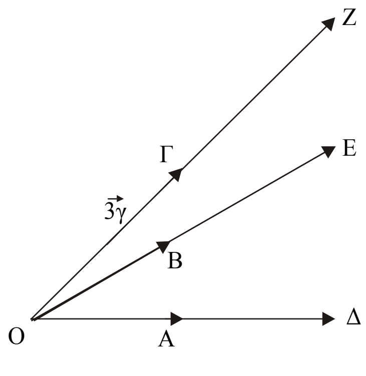


Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το τετράπλευρο ΑΔΓΖ από τη σύγκριση των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$;

20. ** Στο διπλανό σχήμα ισχύει $\overrightarrow{OA} = 4\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 3\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$.

α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{AB}$.

β) Προεκτείνουμε τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ μέχρι τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντιστοίχως έτσι ώστε ΟΓ = ΓΖ, $\frac{OB}{BE} = \frac{OA}{A\Delta} = \frac{1}{2}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ZE}$ και $\overrightarrow{E\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε, Δ είναι συνευθειακά.



21. ** Έστω το διάνυσμα $\vec{v} = (-2,5)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα με πέρας το σημείο Α (3, 1) και τα οποία να είναι αντίρροπα του $\vec{v}$.

22. * Δίνονται τα σημεία Α (1, 3), Β (2, 4) και Γ (5, 14). Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}|$ και $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}|$.

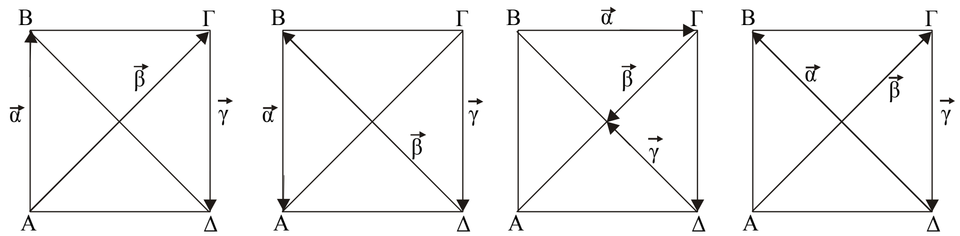
23. * Δίνονται τα σημεία Α (5, 8), Β (-6, 3) , Γ (9, 4).

α) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $\vec{v} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma})$.

β) Ποιες είναι οι συνιστώσες του $\vec{v}$;

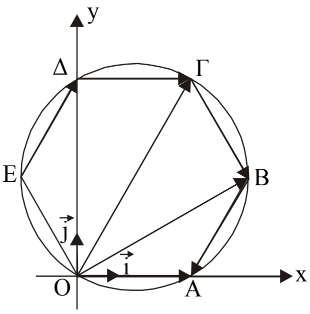
24. * Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 2) , $\vec{\beta}$ = (2, -3) , $\vec{\gamma}$ = (3, 2). Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $x\vec{\alpha} - y\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

25. * Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

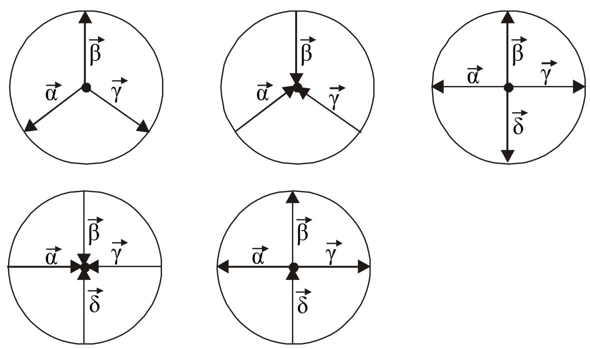


26. ** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{\gamma} = 8\vec{i}$, $\vec{\delta} = -8\vec{i} + 3\vec{j}$. Να βρείτε διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{\omega}$ που είναι συγγραμμικά των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και τα οποία να έχουν άθροισμα το διάνυσμα $\vec{\delta}$.

27. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται κανονικό εξάγωνο ΟΑΒΓΔΕ με $|\overrightarrow{\text{ΟΑ}}| = 4$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΕ}}, \overrightarrow{\text{ΟΓ}}, \overrightarrow{\text{ΟΒ}}, \overrightarrow{\text{ΕΔ}}, \overrightarrow{\text{ΔΓ}}, \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$ ως συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$.



28. ** Οι κύκλοι που φαίνονται στα σχήματα είναι χωρισμένοι σε τρία ή τέσσερα ίσα μέρη.



Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το άθροισμα των τριών ή τεσσάρων διανυσμάτων που έχουν σημειωθεί.

29. * Έστω κύκλος κέντρου Κ και ΑΒ μια διάμετρος αυτού. Αν τα διανύσματα θέσης των Κ και Α είναι $\overrightarrow{\text{ΟΚ}} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου Β.

30. * Έστω τα σημεία Α (1, 2), Β (0, 3) και Γ (5, x). Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x έτσι ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

31. ** Δίνονται τέσσερα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και Ο το σημείο τομής των ΑΓ και ΔΜ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta M}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{\Delta O}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

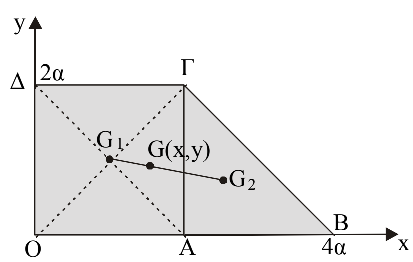
32. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

33. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου, όταν στις κορυφές Α,Β,Γ έχουν τοποθετηθεί βάρη α,β,γ αντιστοίχως στις περιπτώσεις
α) $\alpha = \beta = 1, \gamma = 2$
β) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{4}$.

34. * Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντεταγμένες Α (1, 4), Β (2, 6) και Γ (2, 1). Αν στα Α, Β, Γ τοποθετηθούν βάρη 2, 3, 4 αντιστοίχως, να βρείτε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ.

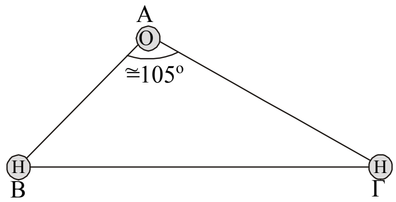
35. * Έστω τα σημεία Α (-4, 5) και Β (1, -5) στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2, 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο των Α, Β.

36. ** Ένα ομοιογενές φύλλο λαμαρίνας ΟΑΒΓΔ αποτελείται από ένα τετράγωνο ΟΑΓΔ και ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΓ) = (ΑΒ) = 2α και (ΟΒ) = 4α. Να βρείτε το κέντρο βάρους του σώματος.



37. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, στις κορυφές Β,Γ,Α του οποίου έχουν τοποθετηθεί βάρη 1, 1, 5 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου αυτού.

38. ** Είναι γνωστό από τη Χημεία ότι ένα μόριο νερού (H_2O) αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου Ο και δυο άτομα υδρογόνου Η. Από πειραματική διαδικασία διαπιστώθηκε ότι τα άτομα αυτά σχημα-



τίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{AB} = \text{AΓ} \cong 0{,}096 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ και $\text{B}\hat{\text{A}}\Gamma \cong 105^\circ$. Θεωρούμε ότι στις κορυφές Α, Β, Γ έχουν τοποθετηθεί βάρη 16, 1, 1 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο του ΑΒΓ.

39. ** α) Έστω τα σημεία Α (-4, 5) και Β (1, -5) στα οποία έχουν τοποθετηθεί βάρη 2, 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το βαρύκεντρο G των Α, Β.

β) Αν γίνει εναλλαγή των βαρών, να βρείτε το νέο βαρύκεντρο G΄.

γ) Να βρείτε το $\left|\overrightarrow{GG'}\right|$.

40. ** Στις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη. Έστω G το βαρύκεντρο του τριγώνου αυτού. Αν Α (-7, -1), Β (-2, -9) και G (0, 0), να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

41. ** Έστω Α, Β, Γ σημεία του επιπέδου.

α) Αν στα Α, Β έχουν τοποθετηθεί βάρη 2,1 αντιστοίχως, να βρείτε το βαρύκεντρο των Α, Β.

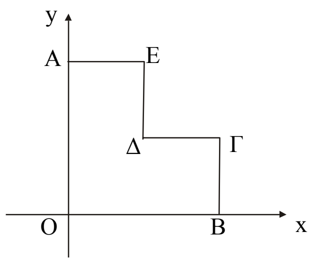
β) Να βρείτε τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$2\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{AΓ}} = \vec{0}$.

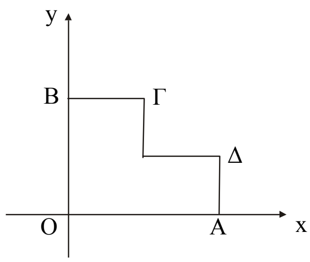
42. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (3, 5) , Β (-3κ, 2), Γ (2κ, κ + 1) , $\kappa \in R$. Αν στις κορυφές Α, Β, Γ τοποθετηθούν βάρη 2, 3, 5 αντιστοίχως και το βαρύκεντρο G του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y, να βρείτε τον αριθμό κ.

43. ** Έστω G_1 το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί ίσα βάρη και G_2 το βαρύκεντρο ενός άλλου τριγώνου Α΄ Β΄ Γ΄ στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί πάλι ίσα βάρη. Αν G είναι το βαρύκεντρο των σημείων Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄, να αποδείξετε ότι τα σημεία G_1, G_2, G είναι συνευθειακά.

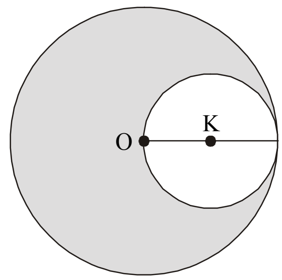
44. ** Να βρείτε το κέντρο βάρους ομοιογενούς φύλλου λαμαρίνας του διπλανού σχήματος με ΟΑ = ΟΒ = 12 cm, ΒΓ = ΔΓ = 6 cm και $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{E} = 90^o$.



45. ** Να βρείτε το κέντρο βάρους ομοιογενούς φύλλου λαμαρίνας y του διπλανού σχήματος με ΟΑ = α, ΟΒ = β, $B\Gamma = \frac{\alpha}{2}$, $A\Delta = \frac{\beta}{2}$ και $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 90^o$.



46. ** Έστω ομοιογενής κυκλική πλάκα (Ο, R) σταθερού πάχους. Αφαιρούμε κυκλική πλάκα (Κ, R/2), όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το κέντρο βάρους της πλάκας που απέμεινε.



47. * Να βρείτε το έργο που παράγεται όταν ένα αντικείμενο μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, αν η δύναμη που ενεργεί σ' αυτό αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

48. * Για να μετακινηθεί ένα σώμα κατά 20 cm και κατά τη διεύθυνση ΟΑ χρειάζεται να ασκηθεί δύναμη $\vec{F} =$ 200N, η οποία σχηματίζει με την ΟΑ γωνία $\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$.

β) Ποια δύναμη πρέπει να ασκηθεί κατά τη διεύθυνση της ΟΑ, ώστε να απαιτείται το ίδιο έργο για τη μετατόπιση του σώματος;

49. ** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται η υπερβολή $y = \frac{6}{x}$ και τα σημεία της Α και Β τέτοια ώστε $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = -2$ και $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = 3$, όπου $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x΄x. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

50. ** Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

51. * Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

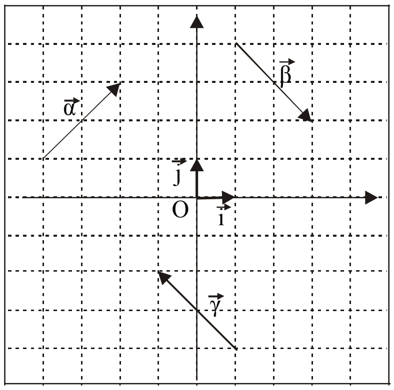
52. * Να βρείτε τον $\lambda \in R$ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda)\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} + 2\vec{j}$ είναι ορθογώνια.

53. * Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = 4\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

54. ** Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.



55. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3, -2), $\vec{\beta}$ = (1, 2) και $\vec{\gamma}$ = (-1, 4). Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\delta}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}, \kappa,\lambda\in R$ που είναι κάθετα στο $\vec{\gamma}$ και έχουν μέτρο 1.

56. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (-2, -1), Β (-2, 3), Γ (x, -1), $x\in R$.

α) Να βρείτε το x έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^{o}$.

β) Αν ΑΓ = 3, να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου.

57. ** Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\sigma\upsilon\nu\omega\vec{\alpha}+\eta\mu\omega\vec{\beta}$, $0\le\omega\le 2\pi$. Να βρείτε το ω ώστε:

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ να είναι ομόρροπα.

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ να είναι αντίρροπα.

γ) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

δ) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

58. ** Αν θ είναι η γωνία δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu\theta=\dfrac{|\,\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\,|}{\sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}\cdot\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}}$.

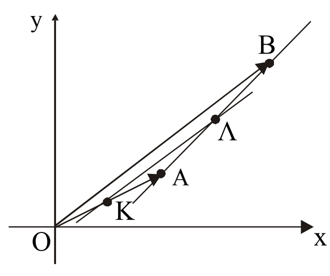
59. ** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=4$ και η γωνία των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου με την πλευρά ΑΒ.

60. * Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα του επιπέδου που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha}$, έχουν τη διεύθυνση του διανύσματος $3\vec{i}+2\vec{j}$.

61. ** Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\vec{i}+2\vec{j}$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=(x,y), x,y\in R$ με μέτρο 1 το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

62. ** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=2\vec{i}+7\vec{j}$, $\vec{\beta}=\vec{i}-3\vec{j}$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

63. ** Τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσης $2\vec{i}+\vec{j}$ και $4\vec{i}+3\vec{j}$ αντιστοίχως. Τα σημεία
Κ και Λ είναι τα μέσα των ΟΑ και ΑΒ. Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση
i) της ευθείας ΑΒ, ii) της ευθείας ΚΛ.



64. ** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα xOy δίνονται τα σημεία Α και Β με διανυσματικές ακτίνες $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, τα οποία δεν είναι συγγραμμικά με το Ο. Θεωρούμε και τις διανυσματικές εξισώσεις ε_1: $\vec{r} = (4-\lambda)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και ε_2: $\vec{r} = (1+3\mu)\vec{\alpha} + (\mu-5)\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις ε_1 και ε_2 είναι εξισώσεις ευθειών.

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

65. * Δίνονται τα σημεία Α(3,-2) και Β(1,-4).

α) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

β) Να βρείτε την Καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

66. ** Σε ένα καρτεσιανό σύστημα ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα ξεκινώντας από το σημείο Α (-1, 1) και παράλληλα στο διάνυσμα $\vec{u} = (12, 2)$. Ένα δεύτερο κινητό κινείται επίσης ευθύγραμμα ξεκινώντας από το σημείο Β (2,-1) συγχρόνως με το πρώτο και παράλληλα στο διάνυσμα $\vec{v} = (6, 6)$.

α) Να βρείτε την απόσταση των δυο κινητών πριν την εκκίνηση.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των τροχιών των δυο κινητών.

γ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο θα συναντηθούν.

67. ** Η καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας ε είναι $3x - 4y + 8 = 0$. Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε.

68. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α, αν ως σύστημα συντεταγμένων πάρουμε αυτό που ορίζεται από τις διαγωνίους του.

69. ** Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: \vec{r} = 2\vec{i} + \lambda(\vec{i} - \vec{j}),\ \lambda \in R, \qquad \varepsilon_2: \vec{r} = -2\vec{i} + \mu(3\vec{i} + 3\vec{j}), \mu \in R$$

Έστω Α το σημείο τομής τους, Δ το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα xx΄ και Ε το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα x΄x. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των Α, Δ, Ε.

β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους G του τριγώνου ΑΔΕ αν

i) στις κορυφές Α, Δ, Ε τοποθετηθούν ίσα βάρη

ii) στις κορυφές Α, Δ, Ε τοποθετηθούν βάρη 5, 4, 7 αντιστοίχως.

70. * Η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας ε είναι:

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \lambda(-\vec{i} + 3\vec{j}), \lambda \in R.$$

Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ε.

71. ** Έστω οι ευθείες $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$ και $\begin{cases} x = 4 - 2\mu \\ y = 2 + 5\mu \end{cases}$, $\mu \in R$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που είναι παράλληλα στις ευθείες.

β) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των ευθειών.

72. ** Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (\mu^2, 1), \mu \in R$. Στη συνέχεια να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του $\mu \in R$ τη σχετική θέση των ευθειών ε και δ: 2x - y = 0.

73. * Ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, η πλευρά του ΒΓ = α βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x, το δε ύψος τους πάνω στον άξονα y΄y. Να βρείτε:

α) τις διανυσματικές εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

β) το διάνυσμα θέσης της κορυφής Α και την απόσταση του Α από τη ΒΓ.

74. ** Να βρείτε την απόσταση:

α) του σημείου με διάνυσμα θέσης $4\vec{i} + 6\vec{j}$ από την ευθεία με εξίσωση $\vec{r} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \lambda(-3\vec{i} + 4\vec{j})$.

β) το διάνυσμα που είναι παράλληλο στην παραπάνω ευθεία και έχει μέτρο 3 μονάδες.

75. ** Έστω Α, Β σημεία του επιπέδου με διανύσματα θέσης $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $\vec{r} = \vec{\alpha} + \lambda(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$.

β) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας ΑΒ στις περιπτώσεις

i) $\lambda = -2$, ii) $\lambda = -1$ iii) $\lambda = 1$ και iv) $\lambda = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες τα σημεία Ρ της ΑΒ ικανοποιούν τη σχέση ΑΡ = 2ΡΒ. Στη συνέχεια να βρείτε τα διανύσματα θέσης των σημείων Ρ.

76. ** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Τα διανύσματα θέσης των κορυφών του Α, Β, Γ είναι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αντιστοίχως.

α) Να βρείτε τις διανυσματικές εξισώσεις των διαμέσων ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ του τριγώνου.

β) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των διαμέσων.