Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ - Υ Π Ο Δ Ε Ι Ξ Ε Ι Σ

Σ Τ Ι Σ Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Κεφάλαιο 1ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ

9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Σ

18.	Λ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Ε
2.	Δ
3.	Ε
4.	Β
5.	Γ
6.	Γ
7.	Ε
8.	Δ
9.	Δ

10.	Γ
11.	Γ
12.	Δ
13.	Γ
14.	Γ
15.	Ε
16.	Β
17.	Ε
18.	Β
19.	Ε

20.	Δ
21.	Δ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Α
25.	Ε
26.	Γ
27.	Δ
28.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Ε
2	Η
3	Ζ
4	Γ
5	Β
6	Δ

2.

1	Ζ
2	Ε
3	Α
4	Γ

3.

1	Ε
2	Ζ
3	Β
4	Η

4.

1	Γ
2	Ζ
3	Δ
4	Η

5.

1	Β
2	Ε
3	Γ

6.

1	Β
2	Ε
3	Ζ

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x = 360° \cdot κ - 25°$ ή $x = 360° \cdot κ + 205°$

β) $x = 360° \cdot κ - 20°$ ή $x = 120° \cdot κ + \frac{1}{3} \cdot 160°$

γ) αδύνατη $κ \in Z$

δ) συν $(x + 50°)$ = συν $(70° - x)$ κλπ.

ε) $x = 360° \cdot κ \pm 150°$

ζ) σφx = 1, άρα $x = κπ + \frac{π}{4}$ ή σφx = - 1, άρα $x = κπ - \frac{π}{4}$

2. **α)** C_2: y = ημ2x

β) Για την C_1: 0, π, 2π, 3π, … Για την C_2: 0, $\frac{π}{2}$, π, $\frac{3π}{2}$, 2π, …

γ) ημx = ημ2x, άρα x = 2κπ ή 3x = 2κπ + π για κ = 0, 1, 2, …

3. $ημ\,(57° - 12°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **α)** $εφ\,(45° - ω) = \frac{1 - εφω}{1 + εφω}$ και $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

β) Εφαρμογή των τύπων

5. α) Εφαρμογή του τύπου του συν (α + β) και συν120° = συν240° = $-\frac{1}{2}$,

ημ120° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ημ240° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Εφαρμογή των τύπων και παραγοντοποίηση

7. εφ (α + β) = 1, άρα $\frac{\frac{1}{3} + εφβ}{1 - \frac{1}{3}εφβ} = 1$ και $εφβ = \frac{1}{2}$

8. Όμοια με την άσκηση 7

9. $εφx = 3 + 2\sqrt{2}$ άρα $εφ\,(x - y) = \dfrac{εφx - εφy}{1 + εφx \cdot εφy} = \dfrac{6+3\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}} = 1$,

δηλαδή $x - y = \dfrac{\pi}{4}$

10. Παρατηρούμε ότι $εφB = \dfrac{1}{2}$ και $εφΓ = \dfrac{1}{3}$, άρα $εφ\,(B + Γ) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$,

άρα $B + Γ = 45°$, άρα $A = 135°$

11. **α)** $ημ^2x + ημ^2y + 2ημxημy = κ^2$ και $συν^2x + συν^2y + 2συνxσυνxy = λ^2$
με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση

β) $συν\,(x - y) = \dfrac{1}{2}$

12. $συν\,(α + β) = συνασυνβ$, άρα $ημαημβ = 0$, δηλαδή $ημα = 0$ και $συνα = 1$ ή $ημβ = 0$ και $συνβ = 1$, σε κάθε περίπτωση ισχύει η αποδεικτέα

13. Για το α΄ μέλος να εφαρμόσετε τον τύπο $συνασυνβ - ημαημβ = συν\,(α + β)$.

14. $συν\,(α + β)\,συν\,(α - β) = συν^2α\,συν^2β - ημ^2α\,ημ^2β$ και $ημ^2α = 1 - συν^2α$, $ημ^2β = 1 - συν^2β$

15. **α)** $εφ\,(α + β) = εφ\,(90° - γ) = σφγ = \dfrac{1}{εφγ}$ και εφαρμογή του τύπου της $εφ\,(α + β)$

β) Αν στην ταυτότητα του (α) ερωτήματος θέσουμε εφα = $\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}$,

εφβ = $\frac{1}{\sigma\varphi\beta}$ και εφγ = $\frac{1}{\sigma\varphi\gamma}$, προκύπτει η (β)

16. εφ (α + β) = εφγ και ανάπτυξη της ταυτότητας

17. ημθ = $\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$ και ημ2θ = 2ημθσυνθ

18. **α)** Εφαρμογή των τύπων του διπλάσιου τόξου

β) Το πρώτο μέλος είναι το $\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x}$

γ) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\,\frac{\eta\mu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\eta\mu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = 2$

19. συν^{4}4α - ημ^{4}4α = (συν^{2}4α - ημ^{2}4α) 1 = συν8α

20. α) Να χρησιμοποιήσετε τους τύπους για τις εφ (α + β) και εφ (α - β)

και ότι εφ $\frac{\pi}{4} = 1$

β) Να εκφράσετε τα ημθ2θ και συν2θ με ημθ και συνθ.

γ) Να εκφράσετε τα ημ4α και συν4α με ημ2α και συν2α.

21. Το πρώτο μέλος γράφεται $\frac{\varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha}\,\frac{\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha}$ = εφ3αεφα

22. Να εκφράσετε πρώτα το ημ2α και το συν2α με ημα και συνα χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες: ημ2α = 2ημασυνα και 1 + συν2α = $2συν^2α$, και μετά το ημα και το συνα με ημ $\frac{α}{2}$ και συν $\frac{α}{2}$.

23. $\frac{σφα+1}{σφα-1} = \frac{συνα+ημα}{συνα-ημα} = \frac{συν^2α-ημ^2α}{(συνα-ημα)^2} = \frac{συν2α}{1-ημ2α}$

24. **ζ)** συνx = 1 - $2ημ^2 \frac{x}{2}$, οπότε προκύπτει τριώνυμο ως προς ημ $\frac{x}{2}$

θ) Χρησιμοποιούμε τους τύπους για τις εφ (α + β) και εφ (α - β) και προκύπτει δευτεροβάθμια εξίσωση.

25. **α)** Να κάνετε τα αθροίσματα γινόμενα

β) Να ομαδοποιήσετε τα αθροίσματα και να τα μετατρέψετε σε γινόμενα.

26. Από τη δοσμένη προκύπτει: $2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} = 2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}$, αλλά $συν\frac{Α+Β}{2} = ημ\frac{Γ}{2}$, άρα $2ημ\frac{Γ}{2}\left[συν\frac{Α-Β}{2} - συν\frac{Γ}{2}\right] = 0$, άρα Α - Β = Γ, δηλαδή Β + Γ = Α = 90°

27. **α)** ΒΓ = 8ημω, ΓΔ = 8συνω

β) ΒΓ + ΓΔ = 8 (ημω + συνω) = $8\sqrt{2}\,ημ\left(\frac{π}{4}+ω\right)$. Η παράσταση μεγιστοποιείται όταν $ημ\left(\frac{π}{4}+ω\right) = 1$, δηλαδή όταν $ω = \frac{π}{4}$

29. $ημ2x + συν2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}$ ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) =$ ημ $\frac{\pi}{6}$ κ.τ.λ.

31. α) Η επίκεντρη γωνία η αντίστοιχη της Α είναι 120°, άρα $\hat{A} = 60°$. Όμοια $\hat{\Gamma} = 50°$, άρα $\hat{B} = 70°$

β) R = 4, άρα α = 8ημ60°, β = 8ημ70°, γ = 8ημ50°

γ) $E = \frac{1}{2}$ βγημΑ = 32ημ70° ημ50° ημ60°

32. α) Στο τρίγωνο ΑΒΜ: $\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + BM^2 - 2\mu_\alpha \cdot BM \cdot$ συνω

Στο τρίγωνο ΑΜΓ: $\beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 - 2\mu_\alpha \cdot M\Gamma \cdot$ συν (π - ω)

και πρόσθεση κατά μέλη

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει: $\frac{B\Delta}{\text{ημω}} = \frac{AB}{\text{ημφ}}$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: $\frac{\Delta\Gamma}{\text{ημω}} = \frac{A\Gamma}{\text{ημ}\,(\pi - \varphi)}$

και διαιρούμε κατά μέλη

33. Αρκεί να υπολογιστεί το ΑΔ, όπου Δ η προβολή του σημείου Α στην ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: ΑΔ = ΑΓ·ημθ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{A\Gamma}{\text{ημφ}} = \frac{B\Gamma}{\text{ημω}} = \frac{x}{\text{ημ}\,(\theta - \varphi)}$, άρα $A\Gamma = \frac{x\text{ημφ}}{\text{ημ}\,(\theta - \varphi)}$,

οπότε $A\Delta = \frac{x\text{ημφημθ}}{\text{ημ}\,(\theta - \varphi)}$

34. Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: $\hat{A} = 60°$, άρα ΓΔ = ΑΓ·ημ60°.

Αρκεί να υπολογιστεί η ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{1200}{ημ30} = \frac{ΑΓ}{ημΒ}$, όμως $\hat{B} = 360° - 225° = 135°$,

άρα ημΒ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Τελικά ΓΔ = $1200 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{6}$